

Лекция 5

ТЕХНОЛОГИЯ МКЭ

На предыдущих двух лекциях для задачи (1.1), (2.21) нами были построены уравнения МКЭ двумя различными способами: специальной ("кусочной") реализацией метода Галеркина и при помощи эвристических элементарных рассуждений. Общим у этих способов было то, что приближенное решение на каждом элементе было линейным, а узлы располагались в концах элементов. Этого оказалось достаточно для того, чтобы оба способа привели к одним и тем же уравнениям и одному и тому же приближенному решению. Объясняется это тем, что второй способ на самом деле не выходит за рамки специальной ("кусочной") реализации метода Рунца, ибо принятое там представление приближенного решения на элементе привело к его (решения) непрерывности (а, следовательно, и принадлежности $H^1(I)$) на всем отрезке.

1. От элемента...

К этому способу можно было бы прийти и другим путем, используя следующие рассуждения. Если $\bar{I} = \bigcup_{i=1}^N e^{(i)}$, то пусть

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N a^{(i)}(u, v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^N l^{(i)}(v), \quad (1)$$

где $a^{(i)}(u, v)$ и $l^{(i)}(v)$ — сужения билинейной и линейной форм на элемент $e^{(i)}$, т.е., например, $l^{(i)}(v) = \int_{e^{(i)}} f v dx$. В силу (3.6)

$$A \equiv K = [a(\varphi_k, \varphi_l)]_1^n = \left[\sum_{i=1}^N a^{(i)}(\varphi_k, \varphi_l) \right]_1^n = \sum_{i=1}^N \left[a^{(i)}(\varphi_k|_{e^{(i)}}, \varphi_l|_{e^{(i)}}) \right]_1^n, \quad (2)$$

где $\varphi_k|_{e^{(i)}}$ — сужение базисной функции φ_k на элемент $e^{(i)}$. Соберем теперь все *ненулевые* сужения базисных функций φ_k на $e^{(i)}$, упорядочим их каким-либо способом, например, по возрастанию k и обозначим через $\varphi_p^{(i)}$. Будем их называть базисными функциями элемента $e^{(i)}$ или *функциями формы* этого элемента. По функциям формы $\varphi_p^{(i)}$ построим матрицу

$$K^{(i)} = \left[a^{(i)}(\varphi_p^{(i)}, \varphi_q^{(i)}) \right], \quad (3)$$

размерность которой будет равна числу функций формы на элементе $e^{(i)}$. Назовем матрицу $K^{(i)}$ *матрицей жесткости элемента* $e^{(i)}$.

Далее, обозначим вектор правой части системы Ритца-Галеркина (3.4) через \mathbf{F} , т.е. пусть

$$\mathbf{F} = [l(\varphi_k)]_1^n.$$

Как и выше с учетом (1) находим, что

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \left[l^{(i)}(\varphi_k|_{e^{(i)}}) \right]_1^n. \quad (4)$$

Отсюда, используя $\varphi_p^{(i)}$, построим вектор

$$\mathbf{F}^{(i)} = \left[l^{(i)}(\varphi_p^{(i)}) \right] \quad (5)$$

той же размерности, что и $K^{(i)}$, который назовем *вектором нагрузки элемента* $e^{(i)}$.

Сравним формулы (3) и (5) с (4.12), (4.13). Для этого зададимся конкретной реализацией МКЭ, рассмотренной в лекции 3. В силу (3.9), (3.10) ненулевые сужения на элемент $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ будут иметь только две базисные функции $\varphi_{i-1}(x)$ и $\varphi_i(x)$. Обозначая их сужения на $e^{(i)}$ через

$\varphi_{i-1}^{(i)}(x)$ и $\varphi_i^{(i)}(x)$, придем к функциям формы (4.6), введенным на предыдущей лекции. Убедимся теперь в том, что матрицы (3) и (4.12), также как и векторы (5) и (4.13), совпадают. Для этого достаточно принять во внимание (4.8), (4.11) и то, что вклад в потенциальную энергию деформации от элемента $e^{(i)}$ на приближенном решении — величина $\Pi_E^{(i)}(u^h)$, введенная на предыдущей лекции — есть не что иное, как $\frac{1}{2}a^{(i)}(u^h, u^h)$.

Сделанное наблюдение наводит на мысль всегда начинать построение МКЭ с рассмотрений на элементе. Так мы и будем поступать.

2. Технология сборки

Глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$ в предыдущей лекции мы построили путем вычислений по формулам (4.19) и (4.20) с использованием матриц жесткости $K^{(i)}$ и векторов нагрузки $\mathbf{F}^{(i)}$ элементов $e^{(i)}$ вкуче с матрицами кинематических связей $\mathbf{S}^{(i)}$. Сейчас мы покажем, как можно (и нужно) строить $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ без перемножений матриц и умножений матриц на векторы, предписываемых формулами (4.19), (4.20). Рассмотрим этот вопрос применительно к ситуации более общей, чем имела место в предыдущей лекции, с тем, чтобы излагаемой процедурой можно было пользоваться и в дальнейшем.

Пусть \mathbf{v} — вектор, $\dim \mathbf{v}$ — его размерность, а $v(k)$, $k=1, \dots, \dim \mathbf{v}$ — его k -я компонента. Аналогично, пусть $A(k, l)$ — элемент матрицы A , стоящий в k -й строке и в l -том столбце.

2.1. *Матрица кинематических связей $\mathbf{S}^{(i)}$.* Опишем формально матрицу кинематических связей $\mathbf{S}^{(i)}$, т.е. матрицу, устанавливающую связь между вектором узловых значений

$$\mathbf{u}^{(i)} = \left[u^{(i)}(1) \dots u^{(i)}(\dim \mathbf{u}^{(i)}) \right]^T$$

элемента $e^{(i)}$ и глобальным вектором узловых значений

$$\mathbf{U}_{(f)} = \left[U_{(f)}(1) \dots U_{(f)}(\dim \mathbf{U}_{(f)}) \right]^T$$

по формуле

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{U}_{(f)}. \quad (6)$$

Чтобы соотношение (6) имело место, матрица $S^{(i)}$ должна иметь $\dim \mathbf{u}^{(i)}$ строк и $\dim \mathbf{U}_{(f)}$ столбцов. Пусть

$$u^{(i)}(1) = U_{(f)}(j_1^{(i)}), \dots, u^{(i)}(p) = U_{(f)}(j_p^{(i)}), \dots, u^{(i)}(\dim \mathbf{u}^{(i)}) = U_{(f)}(j_{\dim \mathbf{u}^{(i)}}^{(i)}), \quad (7)$$

т.е. компонента вектора $\mathbf{u}^{(i)}$ с номером p является $j_p^{(i)}$ -й компонентой вектора $\mathbf{U}_{(f)}$. Будем называть $j_p^{(i)}$ глобальным номером p -й компоненты вектора $\mathbf{u}^{(i)}$. Из глобальных номеров компонент вектора узловых значений $\mathbf{u}^{(i)}$ образуем упорядоченное множество

$$\mathfrak{M}^{(i)} = \left(j_1^{(i)}, j_2^{(i)}, \dots, j_p^{(i)}, \dots, j_{\dim \mathbf{u}^{(i)}}^{(i)} \right). \quad (8)$$

В силу (6), (7)

$$u^{(i)}(p) = \sum_{k=1}^{\dim \mathbf{U}_{(f)}} S^{(i)}(p, k) U_{(f)}(k) = U_{(f)}(j_p^{(i)})$$

и, следовательно, элементы p -й строки матрицы $S^{(i)}$ суть

$$S^{(i)}(p, k) = \delta_{j_p^{(i)}, k}, \quad (9)$$

где

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n \end{cases}$$

— символ Кронекера. Таким образом, в каждой строке матрицы $S^{(i)}$ имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1, а так как все $j_p^{(i)}$ из (7), (8) различны, то в каждом столбце этой матрицы содержится не более одного ненулевого элемента. Соотношения (8), (9) полностью задают матрицу $S^{(i)}$. Матрицы $S^{(i)}$ будут использованы нами для построения глобальной матрицы жесткости $K_{(f)}$ и глобального вектора нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$ по формулам (4.19), (4.20), которые отныне приобретают более широкий смысл, чем тот, который был в них заложен в предыдущей лекции.

2.2. Матрица $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$. Опишем матрицу $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ из (4.19). По

определению произведения матриц

$$\begin{aligned} \left[K^{(i)} S^{(i)} \right] (p, l) &= \sum_{q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} K^{(i)}(p, q) S^{(i)}(q, l), \\ \left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)T}(k, p) \left[K^{(i)} S^{(i)} \right] (p, l) = \\ &= \sum_{p, q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)T}(k, p) K^{(i)}(p, q) S^{(i)}(q, l). \end{aligned}$$

Но $S^{(i)T}(k, p) = S^{(i)}(p, k)$, а принимая во внимание еще и (9), будем иметь

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = \sum_{p, q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \delta_{j_p^{(i)}, k} \delta_{j_q^{(i)}, l} K^{(i)}(p, q). \quad (10)$$

Отсюда следует, что если либо $k \notin \mathfrak{M}^{(i)}$ либо $l \notin \mathfrak{M}^{(i)}$, то

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = 0. \quad (11)$$

Это означает, что *ненулевые элементы матрицы $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ могут располагаться только на пересечениях тех строк и столбцов, номера которых принадлежат множеству $\mathfrak{M}^{(i)}$ из (8).*

Далее, так как двойная сумма в (10) может иметь лишь не более одного отличного от нуля слагаемого, то каждый отличный от нуля элемент матрицы $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ выражается через один элемент матрицы $K^{(i)}$ (совпадает с ним). Именно, если $k, l \in \mathfrak{M}^{(i)}$, т.е. $k = j_m^{(i)}$, $l = j_n^{(i)}$, то

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = K^{(i)}(m, n). \quad (12)$$

Итак, соотношение (12) позволяет по $\mathfrak{M}^{(i)}$ и $K^{(i)}$ строить $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$, минуя непосредственное перемножение матриц.

2.3. Матрица индексов. Соберем информацию о множествах $\mathfrak{M}^{(i)}$ для всех конечных элементов (предполагая, что все $\dim \mathbf{u}^{(i)}$ одинаковы) в виде матрицы, которую будем называть *матрицей индексов* и обозначать

через L . Располагая элементы $\mathfrak{M}^{(i)}$ по столбцу, будем иметь:

$$L = \begin{bmatrix} j_1^{(1)} & j_1^{(2)} & \cdots & j_1^{(N)} \\ j_2^{(1)} & j_2^{(2)} & \cdots & j_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{\dim \mathbf{u}^{(1)}}^{(1)} & j_{\dim \mathbf{u}^{(2)}}^{(2)} & \cdots & j_{\dim \mathbf{u}^{(N)}}^{(N)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Ясно, что $L(p, i) = j_p^{(i)}$ есть глобальный номер в $\mathbf{U}_{(f)}$ p -ой компоненты вектора $\mathbf{u}^{(i)}$, т.е. (7) принимает вид

$$U_{(f)}(L(p, i)) = u^{(i)}(p). \quad (14)$$

Соотношения (14) полностью задают матрицу индексов (13).

При помощи матрицы индексов соотношение (12) можно переписать в следующем виде :

$$K^{(i)}(m, n) = \left[\mathbf{S}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \right] (L(m, i), L(n, i)). \quad (15)$$

Мы теперь можем описать весь процесс формирования (*сборки*) глобальной матрицы жесткости $K_{(f)}$. Поскольку, согласно (4.19), элементы $K_{(f)}$ образуются в результате сложения соответствующих элементов матриц $\mathbf{S}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{S}^{(i)}$, которые, в свою очередь либо являются нулями (см.(11)), либо совпадают с элементами $K^{(i)}$ (см.(12)), то при формировании $K_{(f)}$ элемент $K^{(i)}(m, n)$ локальной матрицы жесткости конечного элемента $e^{(i)}$ должен стать аддитивной составляющей элемента $K_{(f)}(L(m, i), L(n, i))$ глобальной матрицы жесткости :

$$K^{(i)}(m, n) \rightarrow K_{(f)}(L(m, i), L(n, i)). \quad (16)$$

Попросту говоря, глобальная матрица жесткости формируется следующим образом: сначала отведенный для нее массив заполняется нулями, а затем, согласно(15), элементы локальных матриц $K^{(i)}(m, n)$ прибавляются к числам, расположенным в позициях $(L(m, i), L(n, i))$.

2.4. *Глобальный вектор нагрузки.* Что касается формирования глобального вектора нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$ из (4.20), то так как

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \right] (k) &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{S}^{(i)T}(k, p) F^{(i)}(p) = \\ &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{S}^{(i)}(p, k) F^{(i)}(p) = \\ &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \delta_{j_p^{(i)}, k} F^{(i)}(p) = \\ &= \begin{cases} 0, & k \notin \mathfrak{M}^{(i)} \\ F^{(i)}(p), & k = j_p^{(i)} \in \mathfrak{M}^{(i)} \end{cases}, \end{aligned}$$

то ненулевые компоненты $\mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)}$ имеют номера, перечисленные в $\mathfrak{M}^{(i)}$, и совпадают с соответствующими компонентами $\mathbf{F}^{(i)}$ согласно (14). Отсюда

$$F^{(i)}(m) \rightarrow F_{(f)}(L(m, i)). \quad (17)$$

3. Пример

Применим описанную процедуру сборки к построению матрицы жесткости $K_{(f)}$ и вектора нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$, отвечающих конечноэлементному решению задачи (4.2) при помощи линейных конечных элементов, рассмотренных на предыдущей лекции. Пусть, как и в примере из предыдущей лекции, отрезок $[0, 1]$ разбит на три элемента $e^{(i)}$ равной длины $h = 1/3$ (см. рис. 1). Принятая нами ранее нумерация узлов по формуле

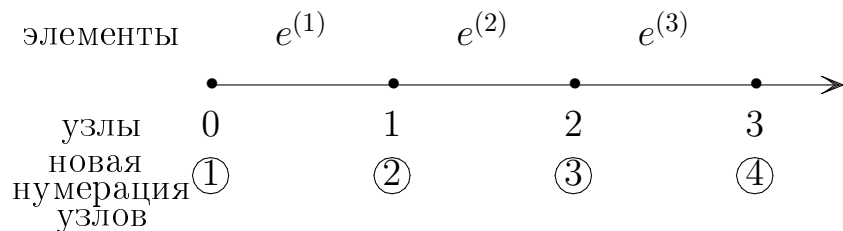


Рис. 1

$x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, 3$, теперь нас не устраивает, ибо чтобы уложиться в формальную схему, глобальные номера должны принимать значения от 1 до $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 4$. Перенумеруем узлы так, как это изображено на рис. 1 в кружочках. На элементе $e^{(i)}$ локальную нумерацию узлов осуществим как изображено на рис. 2.

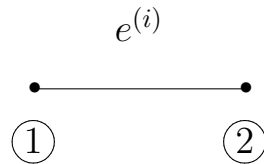


Рис. 2

В рассматриваемом примере $N = 3$, $\dim \mathbf{u}^{(i)} = 2$, $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 4$. Матрица жесткости и вектор нагрузки элемента задаются соотношениями (4.12), (4.13) соответственно. Выпишем матрицу индексов. Согласно (14) и рис.1, 2 она имеет следующий вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Соотношения (4.12), (4.13) и (18) полностью определяют $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Построим их. Из (16), (17) следует, что вклад матрицы $K^{(1)}$ в $K_{(f)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ в $\mathbf{F}_{(f)}$ определяется элементами первого столбца матрицы индексов (18) и осуществляется следующим образом: элемент $K^{(1)}(1, 1)$ складывается с элементом из первой строки и первого столбца формируемой матрицы $K_{(f)}$, первоначально состоящей из одних нулей, (запишем это так: $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$), элемент $K^{(1)}(2, 1)$ складывается с элементом из второй строки и первого столбца $(2, 1) \rightarrow (2, 1)$, а элементы $K^{(1)}(1, 2)$ и $K^{(1)}(2, 2)$ — с элементами первой и второй строк соответственно из второго столбца, т.е. $(1, 2) \rightarrow (1, 2)$, $(2, 2) \rightarrow (2, 2)$. Аналогично осуществляется вклад $\mathbf{F}^{(1)}$ в $\mathbf{F}_{(f)}$. Соберем список перемещений элементов матрицы $K^{(1)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ в таблицу:

$$\begin{array}{lll} (1, 1) \rightarrow (1, 1) & (1, 2) \rightarrow (1, 2) & (1) \rightarrow (1) \\ (2, 1) \rightarrow (2, 1) & (2, 2) \rightarrow (2, 2) & (2) \rightarrow (2) \end{array}.$$

Тем самым, матрица $S^{(1)T}K^{(1)}S^{(1)}$ и вектор $S^{(1)T}\mathbf{F}^{(1)}$ из (4.19), (4.20) суть

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Gh \begin{bmatrix} \boxed{1/2} \\ \boxed{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где в рамочку заключены элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$.

На рис. 3 изображен процесс сборки $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Каждая ячейка, отведенная на этом рисунке для элементов $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ (изображена жирными линиями) разбита на три клеточки (по числу элементов на $[0,1]$),

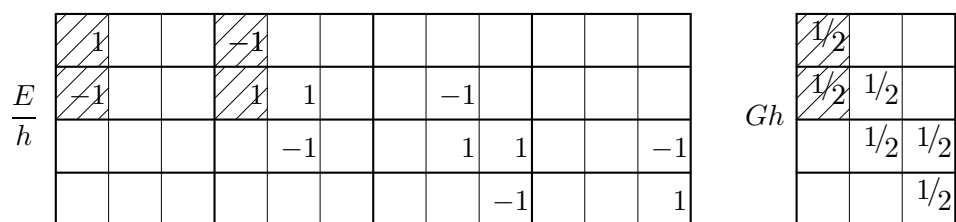


Рис. 3

и вклад в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ от $K^{(i)}$ и $\mathbf{F}^{(i)}$ изображен в соответствующей клеточке, которые сопоставлены элементам согласно рис. 4.

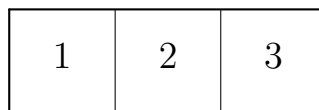


Рис. 4

Описанному этапу сборки — вкладу элемента $e^{(1)}$ — отведены левые клеточки в каждой ячейке, а элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$ размещены в тех из них, которые имеют штриховку.

Вклад в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ от остальных элементов осуществляются аналогично. Для визуализации сборки (на бумаге, но не в машине!) может оказаться полезным и далее выписывать таблицы новых позиций элементов $K^{(i)}$

и $\mathbf{F}^{(i)}$ в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Эти таблицы строятся из надлежащим образом повторенных элементов соответствующих столбцов L . Например, для элемента $e^{(2)}$ процесс формирования таблицы таков:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 2 \\ 3 & \rightarrow & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 2 \\ 3 & \rightarrow & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} (2, 2) & (2, 3) \\ (3, 2) & (3, 3) \end{array}$$

Из рис. 3 находим, что система (4.21) имеет вид

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

а после учета главного граничного условия (4.1) получим

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

что (с точностью до нумерации значений приближенного решения) совпадает с (4.24).

4. Упражнения

1. Пусть несимметричная билинейная форма $a(u, v)$ задана соотношением (2.17), что соответствует несамосопряженному уравнению (2.16), а

$$a^{(i)}(u, v) = a_p^{(i)}(u, v) + a_r^{(i)}(u, v) + a_q^{(i)}(u, v),$$

где, например,

$$a_r^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r(x) u'(x) v(x) dx.$$

Используя (3), доказать, что, если конечноэлементное решение принадлежит S_1^h из (3.8), то матрица жесткости $K_r^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_r^{(i)}(u, v)$ при $r(x) = \text{const} = r$, есть

$$K_r^{(i)} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Сопряженное к (2.16) уравнение имеет вид

$$-(p(x)u')' - (r(x)u)' + q(x)u = f(x),$$

а соответствующее вариационное уравнение есть

$$\int_0^1 (p(x)u'v' + r(x)uv' + q(x)uv) dx = \int_0^1 f(x)v dx.$$

Пусть

$$a_r^{*(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r(x)u(x)v'(x) dx.$$

В условиях упражнения 1 построить матрицу жесткости $K_r^{(i)}$, отвечающую билинейной форме $a_r^{*(i)}(u, v)$.

3. В билинейную форму последнего элемента $e^{(N)}$ входит слагаемое

$$a_{\varkappa}^{(N)}(u, v) = \varkappa u(1)v(1),$$

где $\varkappa = \text{const}$. В условиях упражнения 1 построить матрицу жесткости $K_{\varkappa}^{(N)}$, отвечающую билинейной форме $a_{\varkappa}^{(N)}(u, v)$.

4. Построить глобальную матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$$

и конечноэлементному пространству S_1^h из (3.8) при $N = 4$ и нумерации узлов, изображенной на рис. 5.

5. Построить глобальную матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме из упражнения 4 и конечноэлементному пространству кусочно-линейных непрерывных функций, если координаты концов элементов таковы, как на рис. 6, а нумерация обычная.

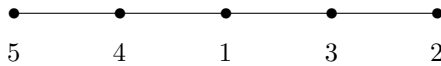


Рис. 5

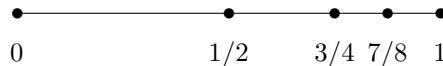


Рис. 6

